(المحاضرة 8 درس مرقمة)

الأربعاء 9 / 5 / 2018م المحاضرة 15م:

تمارين عن الدوال القيوسة:

تمرين 1.

لتكن $\varphi:[0,1] \longrightarrow R$ دالة ديرخلية المعرفة بالشكل

$$\varphi(x)=\begin{cases} 1 & , x\in[0,1]\cap Q \\ 0 & ; x\in[0,1]\setminus Q \end{cases}$$

أثبت أن الدالة φ قيوسة على المجموعة $[0,1]$

الحل:

ليكن c عدداً حقيقياً عندئذٍ

$$E(\varphi>c)=\{x\in[0,1] ; \varphi(x)>c\}$$

$$=\begin{cases} [0,1] & ; c<0 \\ [0,1]\cap Q & 0\leq c<1 \\ \phi & c\geq 1 \end{cases}$$

وبما أن المجموعات $[0,1]$, $[0,1]\cap Q$ و ϕ كلاً قيوسة

فإن المجموعة $E(\varphi>c)$ قيوسة من أجل كل عدد حقيقي c

لذلك تكون الدالة φ قيوسة.

تمرين 2.

لتكن الدالة $\psi: R \longrightarrow R$ المعرفة بالشكل:

$$\psi(x)=\begin{cases} 1 & ; x\in Q \\ 0 & ; x\notin Q \end{cases}$$

هل ψ قيوسة على R ؟

الحل:

ليكن c عدداً حقيقياً عندئذٍ:

$$E(\psi>c)=\{x\in R: \psi(x)>c\}$$

$$=\begin{cases} R & ; c<0 \\ Q & ; 0\leq c<1 \\ \phi & ; c\geq 1 \end{cases}$$

/ /

وبما أن المجموعات $\mathbb{R}$ ، $\mathbb{Q}$ ، Φ قيوسة فإن المجموعة $E(\psi > c)$
قيوسة من أجل كل عدد حقيقي c وبالتالي، الدالة ψ قيوسة.

الطريقة 2.

ليكن c عددا حقيقيا عندئذ

$$E(\psi < c) = \{x \in \mathbb{R} : \psi(x) < c\}$$

$$= \begin{cases} \Phi & ; c \leq 0 \\ \mathbb{Q} & 0 < c < 1 \\ \mathbb{R} & ; c \geq 1 \end{cases}$$

تمرين 3

لتكن الدالة $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ حيث $f(x) = \begin{cases} 0 & ; x = 0 \\ \frac{1}{x} & ; x \neq 0 \end{cases}$

هل f قيوسة على $\mathbb{R}$ ؟

الحل:

ليكن c عددا حقيقيا عندئذ

$$E(f > c) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > c\}$$

$$= \begin{cases} \mathbb{R} & ; c < 0 \\ \mathbb{R} \setminus \{0\} & ; c = 0 \\ \left]-\frac{1}{\sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{c}}\right[& ; c > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{x^2} > c$

$\Rightarrow x^2 < \frac{1}{c}$ ، $c > 0$

$\Rightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{c}}$

$\Rightarrow x \in \left]-\frac{1}{\sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{c}}\right[$

وبما أن المجموعات في الطرف الأيمن كلها قيوسة

$\Leftarrow$ المجموعة $E(\psi > c)$ قيوسة

من أجل كل عدد حقيقي c $\Leftarrow$ f قيوسة على $\mathbb{R}$

وهو المطلوب ...

/ /

تمرين -٤-

لتكن الدالة $f:[-1,+1] \longrightarrow R$ المعرفة بالشكل

$$f(x)=\begin{cases} 0 & ; x=0 \\ \frac{1}{x^2} & ; x\neq 0 \end{cases}$$

هل f مقيسة على $[-1,+1]$ ؟

الحل:

ليكن c عدداً حقيقياً عشوائياً:

$$E(f\leq c)=\{x\in[-1,+1] : f(x)\leq c\}$$

$$=\begin{cases} \phi & , c<0 \\ \{0\} & , c=0 \\ [-1,-\frac{1}{\sqrt{c}}]\cup[\frac{1}{\sqrt{c}},1] & ; c>0 \end{cases}$$

$\frac{1}{x^2}\leq c \Rightarrow x^2 \geq \frac{1}{c}$

$|x| \geq \frac{1}{\sqrt{c}}$

$x\in]-\infty,-\frac{1}{\sqrt{c}}]\cup[\frac{1}{\sqrt{c}},+\infty[$

⟸ المجموعات بالطرف الأيمن كلها مقيسة

⟸ لذلك فإن المجموعة $E(f\leq c)$ مقيسة

من أجل كل c ⟸ وبالتالي الدالة f مقيسة.

تمرين -٥-

أثبت أن كل دالة مستمرة على مجموعة E تكون مقيسة على E

الحل:

لتكن $f:E\to R$ دالة مستمرة على E، لنثبت أن المجموعة $E(f\leq c)$ مقيسة من أجل كل عدد حقيقي c

لذلك يكفي إثبات أن $E(f\leq c)$ بوريلية ويكفي لإثبات ذلك أن تكون $E(f\leq c)$ مجموعة مغلقة ⟸

لنأخذ متتالية ولتكن $\{x_n\}$ من عناصر المجموعة $E(f\leq c)$ متقاربة من x_0، وذلك يعني $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$

بما أن $x_n \in E(f \le c)$ فإنه $n=1,2,\dots$; $f(x_n) \le c$

وبما أن f دالة مستمرة بالفرض فيكون

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0) \le c$$

لذلك $x_0 \in E(f \le c)$ أي أن

$E(f \le c)$ مجموعة مغلقة ⇐ بوريلية ⇐ قيوسة

تمرين ـ٦ـ

أثبت أن كل دالة مستمرة تقريبا في كل مكان على E تكون قيوسة على E

الحل:

لتكن $f : E \to R$ دالة مستمرة تقريبا في كل مكان على المجموعة E

هذا يعني أنه توجد مجموعة جزئية $E_0 \subset E$ بحيث أن $\lambda(E_0)=0$

والدالة f غير مستمرة على E_0 ، لكنها مستمرة على $E \setminus E_0$
(ناقص (فرق))

⇐ إن f قيوسة على E_0 لأن $\lambda(E_0)=0$

كما أن f قيوسة على $E \setminus E_0$ لأن f مستمرة ⇐ وبالتالي

⇐ فإن f قيوسة على الاتحاد $E_0 \cup (E \setminus E_0) = E$

وهو المطلوب.

تمرين ـ٧ـ

نفرض A مجموعة جزئية من مجموعة أخرى E عندئذ نعرف الدالة المميزة للمجموعة A بالشكل

$$I_A : E \to A$$

$$x \to I_A(x) = \begin{cases} 1 & ; x \in A \\ 0 & ; x \notin A \end{cases}$$

أي تقيس A

أثبت أن الدالة I_A تكون قيوسة إذا وفقط إذا كانت المجموعة A قيوسة؟

/ /

الحل:

⇐ نفرض أن المجموعة A قيوسة عندئذٍ من أجل كل عدد حقيقي c نجد:

$$E(I_A > c) = \{x \in E : I_A(x) > c\}$$

$$= \begin{cases} E & ; \quad c < 0 \\ A & ; \quad 0 \leq c < 1 \\ \phi & ; \quad c \geq 1 \end{cases}$$

ومن ذلك ينتج أن المجموعة $E(I_A > c)$ قيوسة من أجل كل عدد حقيقي c

⇐ الدالة I_A قيوسة على E

⇒ نفترض الآن أن الدالة I_A قيوسة لهذا يعني أن المجموعة $E(I_A > c)$ قيوسة من أجل كل عدد c

وبشكل خاص من أجل $c=0$ ⇐ لذلك يكون لدينا:

$$E(I_A > 0) = \{x \in E : I_A(x) > 0\}$$

$$= \{x \in E : I_A(x) = 1\} = A$$

الطرف الأيسر قيوس ⇐ الطرف الأيمن قيوس ⇐

فتكون المجموعة A قيوسة وهو المطلوب

انتهت المحاضرة 5